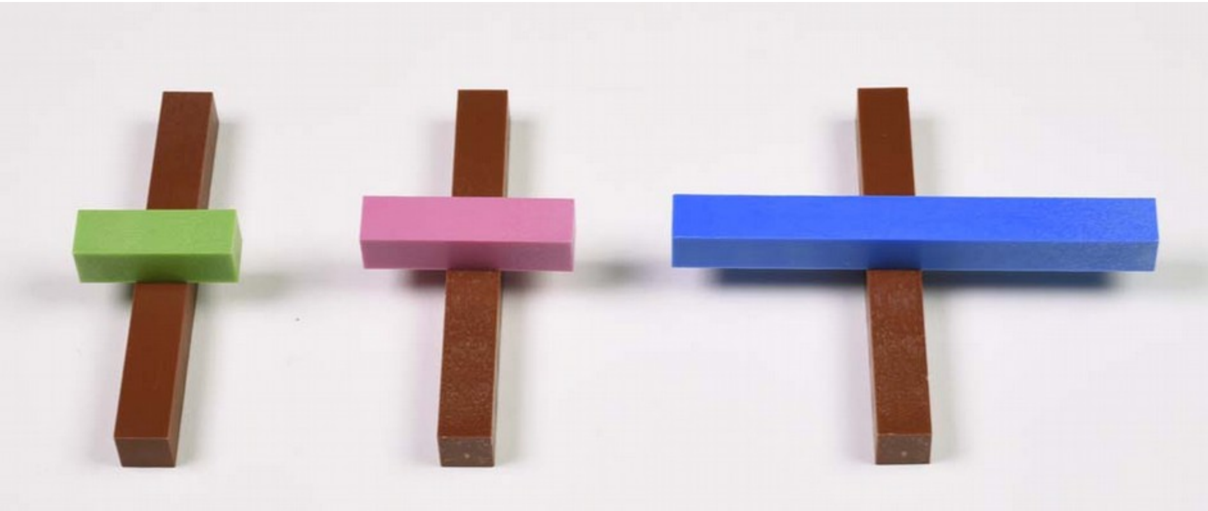
3. PGCD et PPCM

Application ciblée de la division en facteurs premiers :

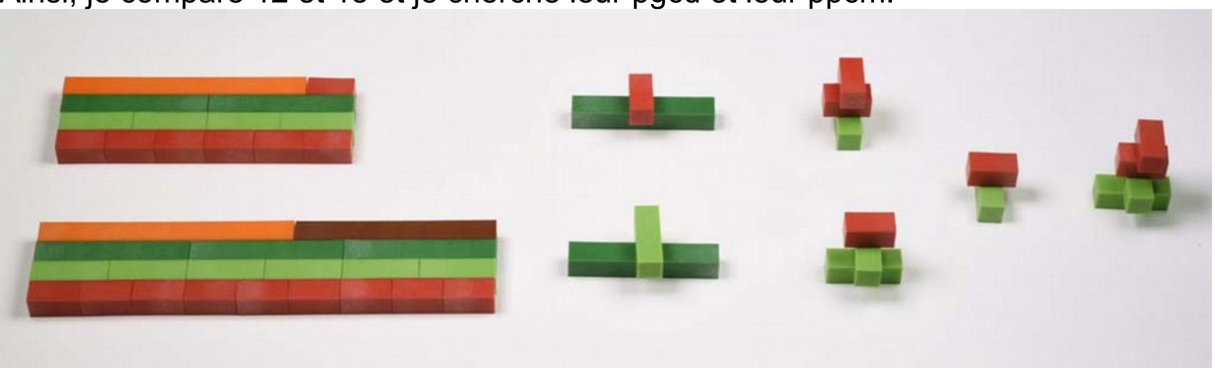
Rappel du chapitre précédent :
Quelques enfants ont remarqué, dans un ensemble de produits en croix, que certains ont un « air de famille ».

Ainsi, dans la représentation de 24 par (3 x 8), de 32 par (4 x 8), de 72 par (9 x 8), chacun de ces nombres ont la réglette brune (8) en commun. Ces nombres ont donc un diviseur commun : 8



Il est intéressant de faire un jeu pour trouver, pour chaque groupe de deux nombres, ce qu'ils ont de commun. C'est la recherche du plus grand commun diviseur et du plus petit multiple commun : notions très utiles lorsqu'on aborde les opérations sur les fractions.

Ainsi, je compare 12 et 18 et je cherche leur pgcd et leur ppcm.



A priori, si je compose les deux « trains » 12 donc 10 + 2 et 18 donc 10 + 8, je n'y vois pas un « air de famille ».
Si, au contraire, je compare les produits en croix de 12 et de 18, je découvre cet « air de famille »
12 = 6 x 2 et 18 = 6 x 3 (la réglette 6 est commune)
12 = 4 x 3 et 18 = 6 x 3 (la réglette 3 est commune)
12 = 6 x 2 et 18 = 9 x 2 (la réglette 2 est commune)

Le jeu consiste maintenant à trouver quel est le plus grand nombre commun aux nombres 12 et 18.
Dans l'exemple ci-dessus c'est 6, mais il n'est pas certain qu'on n'en trouvera pas d'autres.

Voici donc le moyen d'en être sûr :
Au produit en croix (6 x 2), je peux remplacer la réglette 6 par le produit (3 x 2), et le remettre à sa place. J'ai maintenant une tour en sapin de Noël (3 x 2 x 2).
D'autre part, dans le produit en croix (4 x 3), je peux remplacer la réglette 4 par le produit (2 x 2), le remettre à sa place, et j'ai un sapin (3 x 2 x 2). Il est identique à l'autre.
Ceci permet de rassurer les enfants qui se demandent si (6 x 2) c'est bien le même que (4 x 3).

Par plusieurs exemples, on peut montrer que dans un nombre qui a plusieurs représentations en produits en croix, toutes celles-ci peuvent être les mêmes si on remplace les plus grandes réglettes par des plus petites de même valeur (en produit).
On a ainsi décomposé un nombre en facteurs premiers.
Si maintenant je reviens aux nombres 12 et 18 que je souhaite comparer, je représente 12 par une tour en sapin de Noël (2 x 2x 3) et 18 par (3 x 3 x 2).

Il est plus facile maintenant de les comparer :
Si je cherche le plus grand nombre commun à 12 et à 18 (le plus grands commun diviseur) je trouve une réglette vert clair et une réglette rouge, donc 2 x 3 = 6.
6 est le pgcd de 12 et 18.
De même, je cherche le plus petit des nombres qui comprend à la fois 12 et 18.
J'ai besoin de 2 réglettes 2 et une réglette vert clair pour 12, puis encore une réglette vert clair pour 18.
Je recompose la tour en sapin de Noël avec tout cela et je trouve :
2 x 2 x 3 x 3 = 36
Et 36 est le ppcm de 12 et 18.
Les enfants sont invités à faire cet exercice avec plusieurs couples de nombres. Et parfois, ces nombres n'ont rien en commun (par exemple 18 et 25), et le pgcd est 1, et le ppcm est 18 x 25.

Jeux et exercices :
- Chercher le pgcd de 25 et de 40
- Chercher le pgcd de 18,36 et 48
- Chercher le ppcm de 8 et 48
- Chercher le ppcm de 28 et 49
- Chercher le pgcd de 25 et 36

En cas de doute, on vérifie avec les réglettes à partir des produits en croix et des tours.
Faire ensuite la même comparaison sans les réglettes, en calcul écrit, puis en calcul mental.
Les notions de pgcd et ppcm sont maintenant comprises.

Vidéos PGCD PPCM